Statistique à rupture de renforts fibreux fragiles

Les fibres de verre ou de carbone qui rentrent dans la composition de matériaux composites ont un comportement élastique-fragile. Leur rupture est conditionnée par la présence de défauts, généralement situés en surface, au niveau desquels des concentrations de contrainte induisent la propagation de fractures. La rupture du renfort met ainsi en jeu des aspects statistiques liés à la distrbution de taille des défauts initialement présents dans les fibres. Expérimentalement, on note par exemple que la contrainte à rupture moyenne de fibres fragiles a tendance à décroître lorsque leur taille augmente : plus le volume sollicité est important, plus la probabilité de rencontrer un défaut critique entraînant la fracture de la fibre est important. Dans un composite, on observe également que la rupture du renfort se fait de façon progressive lorsqu'on augmente la déformation. Les premières ruptures de fibres interviennent à des niveaux de contrainte bien inférieurs à la contrainte à rupture du matériau.

Cette note décit les approches statistiques couramment employées pour décrire la rupture de renforts fibreux fragiles. Celles-ci sont appliquées au cas de la rupture d'un écheveau de fibres.

1 Statistique de Weibull

La fibre est supposée constituée d'un assemblage de maillons ayant chacun leur résistance propre à la rupture. La fracture de la fibre intervient quand le maillon le plus faible se rompt. On divise la fibre en N segments dans lesquels la contrainte est supposée uniforme est égale à σ_i. La probalité pour qu'un segment soit rompu à la contrainte σ_i est $F(\sigma_i)$. A $F(\sigma_i)$, on associe la fonction de densité de probabilité $f(\sigma)$ définie par :

$$F\left(\sigma_i\right) = \int_0^{\sigma_i} f(\sigma) d\sigma \tag{1}$$

Si σ_r est la résistance théorique à rupture du matériau :

$$F\left(\sigma_r\right) = \int_0^{\sigma_r} f(\sigma) d\sigma = 1 \tag{2}$$

La probabilité qu'un maillon ne soit pas rompu à la contrainte σ_i est égale à $1 - F\left(\sigma_i\right)$ et la probabilité, R, que toute la fibre ne soit pas rompue est donnée par :

$$R = \prod_{i=1}^{N} \left(1 - F\left(\sigma_i\right)\right) \quad (3)$$

Si l'on suppose que la contrainte dans la fibre est uniforme et égale à σ :

$$R = \left(1 - F\left(\sigma\right)\right)^N \quad (4)$$

La probabilité pour que la fibre soit rompue à la contrainte σ est alors :

$$P_r(\sigma) = 1 - R = 1 - \left(1 - F\left(\sigma\right)\right)^N \quad (5)$$

En utlisant l'approximation de Poisson , $\lim_{n \to \infty} \left(1 - \frac{x}{n}\right)^n = \exp(-x)$,on obtient :

$$\left(1 - F\left(\sigma\right)\right)^N = \exp\left(-NF\left(\sigma\right)\right) \quad (6)$$

Le nombre de maillons est supposé proportionnel à la longueur L de la fibre, ce qui permet d'écrire $NF\left(\sigma\right) = L\Phi(\sigma)$ où la fonction Φ reste à déterminer. Weibull a proposé pour cette fonction la forme empirique suivante :

$$\Phi(\sigma) = \frac{\left(\sigma - \sigma_u\right)^m}{\sigma_0} \; ; \sigma > \sigma_u \quad (7)$$

$$\Phi(\sigma) = 0 \; ; \sigma \leq \sigma_u \quad (8)$$

avec

- σ_u : contrainte seuil en dessous de laquelle il n'y a pas de rupture possible.
- σ_0 : facteur d'échelle.
- m : paramètre rendant compte de la largeur de la distribution.

Dans la plupart des cas pratiques, le seuil de rupture est très faible et l'on peut considérer que $\sigma_u \approx 0$. La probabilité de rupture d'une fibre subissant une contrainte σ est alors donnée par :

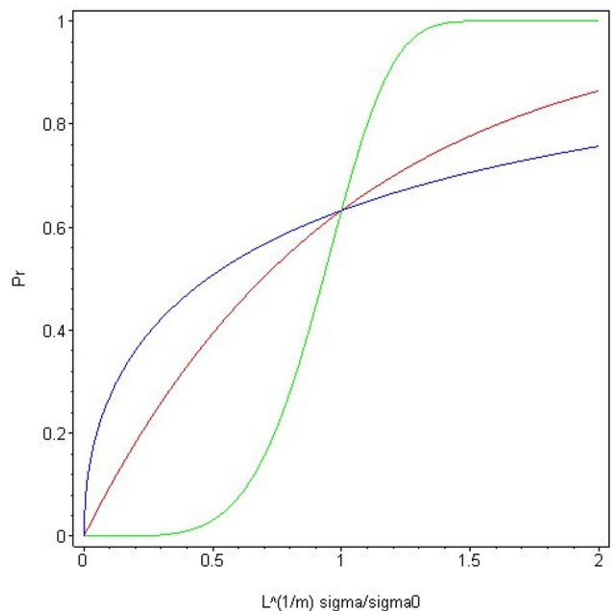

FIG. 1 – *Probabilité de rupture décrite par une statistique de Weibull. Bleu : $m = 0.5$; rouge : $m = 1$; vert : $m = \infty$.*

$$P_r(\sigma) = 1 - \exp\left[-L\left(\frac{\sigma}{\sigma_0}\right)^m\right]. \tag{9}$$

La contrainte moyenne à rupture d'une population statistique de fibres peut s'écrire :

$$\overline{\sigma_r} = \int_0^1 \sigma dP_r \tag{10}$$

Cette intégrale coresspond à l'aire hachurée sur la figure ci-dessous. On peut également l'exprimer sous la forme suivante :

$$\overline{\sigma_r} = \int_0^\infty (1 - P_r) d\sigma \tag{11}$$

Soit à partir de l'équation (9) :

$$\overline{\sigma_r} = \int_0^{\infty} exp\left[-L\left(\frac{\sigma}{\sigma_0}\right)^m\right] d\sigma \tag{12}$$

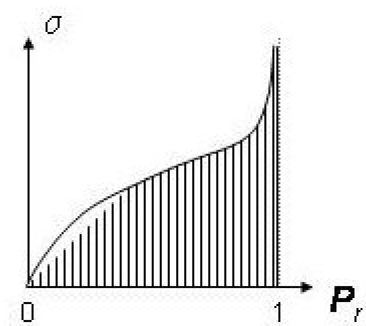

FIG. 2 – *calcul de la contrainte moyenne à rupture*

On effectue les changements de variable suivants :

$$t = L\left(\frac{\sigma}{\sigma_0}\right)^m$$
$$\sigma = \sigma_0\left(\frac{t}{L}\right)^{1/m}$$
$$d\sigma = \frac{\sigma_0}{mL^{1/m}} t^{\frac{1-m}{m}} dt$$

l'équation (12) devient

$$\overline{\sigma_r} = \int_0^{\infty} e^{-t} t^{\frac{1-m}{m}} \frac{\sigma_0}{mL^{1/m}} dt \tag{13}$$

soit

$$\overline{\sigma_r} = \frac{\sigma_0}{L^{1/m}} \Gamma\left(1 + \frac{1}{m}\right) \tag{14}$$

où Γ est la fonction Gamma définie comme suit :

$$\Gamma = \int_0^\infty t^{z-1} e^{-t} dt \tag{15}$$

2 Rupture d'un écheveau de fibres

On considère un écheveau de N fibres fragiles équitendues soumis à une sollicitation de traction à déformation imposée. Lors du chargement, le nombre de fibres rompues s'accroît progressivement. La rupture de l'écheveau est atteinte quand celui-ci devient incapable de supporter un accroissement de la force lorsque la déformation augmente, soit :

$$\frac{dP_E}{d\varepsilon} = 0 \tag{16}$$

où P_E est la charge appliquée ε et la déformation.
A la charge P_E, la contrainte nominale dans l'écheveau est :

$$\sigma_E = \frac{P_E}{A_E} = \frac{P_E}{NA_f} \tag{17}$$

où A_E et A_f sont respectivement la section de l'écheveau et de la fibre.

Si n fibres sont supposées rompues à la charge P_E, la contrainte, σ_f, dans les fibres non rompues est donc :

$$\sigma_f = \frac{P_E}{(N-n)\,A_f} \tag{18}$$

d'où l'on peut écrire

$$P_E = \sigma_f\,(N-n)\,A_f = \sigma_f A_E\,(1-P_r) \tag{19}$$

soit dans le cas de fibres obéissant àune statiqtique de Weibull

$$P_E = \sigma_f A_E \exp -L \left(\frac{\sigma_f}{\sigma_0}\right)^m \tag{20}$$

La condition de rupture donnée par l'équation (17) sécrit également

$$\frac{dP_E}{d\sigma_f} = 0 \tag{21}$$

car $\varepsilon_f = \varepsilon_E = E_f \sigma_f$

A partir de l'équation (20) il vient

$$\frac{dP_E}{d\sigma_f} = A_E \left[\exp -L \left(\frac{\sigma_f}{\sigma_0}\right)^m\right] \left[1 - mL \left(\frac{\sigma_f}{\sigma_0}\right)^m\right] \tag{22}$$

Cette dérivée est nulle pour :

$$1 - mL \left(\frac{\sigma_f}{\sigma_0}\right)^m = 0 \tag{23}$$

c'est à dire pour

$$\left(\frac{\sigma_f}{\sigma_0}\right)^m = \frac{1}{mL} \tag{24}$$

La contrainte maximale supportée par l'écheveau est alors

$$\sigma_E^{\max} = \frac{P_E^{\max}}{A_N} = \sigma_0 \left(Lm\right)^{\frac{-1}{m}} \exp\left(\frac{-1}{m}\right)$$

Cette valeur de la contrainte à rupture de l'écheveau peut être comparée à la contrainte à rupture moyenne des fibres (équation (14)) :

$$\frac{\sigma_E^{\max}}{\overline{\sigma_r}} = \frac{1}{m^{\frac{1}{m}} \exp\left(\frac{1}{m}\right) \Gamma\left(1 + \frac{1}{m}\right)} \tag{25}$$

Pour des valeurs courantes de m, ce rapport est toujours inférieur à 1. La contrainte à rupture moyenne de la fibre n'est donc pas une donnée suffisante pour décrire les caractéristiques à rupture de l'écheveau.

References

Weibull, W., "'A statistical distribution function of wide applicability"'. *Journal of Applied Mechanics* (1951) **18**, 293-296.